

# UNE STRATIFICATION DE THOM-MATHER DE L'ENSEMBLE ASYMPTOTIQUE D'UNE APPLICATION POLYNOMIALE $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$

NGUYỄN THỊ BÍCH THỦY

ABSTRACT. Let  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  be a polynomial mapping. We prove that the stratification of the asymptotic set of  $F$  defined by “la méthode des façons” in [NT1] is a Thom-Mather stratification.

RÉSUMÉ. Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale. Nous prouvons que la stratification de l'ensemble asymptotique de  $F$  définie par “la méthode des façons” in [NT1] est une stratification de Thom-Mather.

## INTRODUCTION

Soit  $F : \mathbb{C}_{(x)}^n \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha)}^n$  une application polynomiale. L'ensemble asymptotique de  $F$ , noté  $S_F$ , est l'ensemble des points du but en lesquels l'application  $F$  n'est pas propre. Dire que l'application  $F$  n'est pas propre en un point du but  $a \in \mathbb{C}_{(\alpha)}^n$  peut être caractérisé des deux manières suivantes :

1) Il existe une suite  $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_{(x)}^n$  dans la source telle que  $\{\xi_k\}$  tende vers l'infini et telle que l'image  $F(\xi_k)$  tende vers  $a$ .

Ici, “la suite  $\{\xi_k\}$  tend vers l'infini” signifie que la norme euclidienne  $|\xi_k|$  de  $\xi_k$  dans  $\mathbb{C}_{(x)}^n$  tend vers l'infini.

2) Il existe une courbe différentiable

$$\gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x)}^n, \quad \gamma(u) = (\gamma_1(u), \dots, \gamma_n(u))$$

tendant vers l'infini et telle que  $F \circ \gamma(u)$  tend vers  $a$  lorsque  $u$  tend vers l'infini.

Dans les années 90, Jelonek a étudié l'ensemble asymptotique associé à une application polynomiale  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  de manière approfondie et il en a décrit les principales propriétés [J1]. La compréhension de la structure de cet ensemble est très importante par sa relation avec la Conjecture Jacobienne (voir, par exemple, [Es]).

Dans [NT1], nous fournissons une méthode, appelé *la méthode des façons* pour stratifier l'ensemble asymptotique  $S_F$ . La stratification obtenue est une stratification différentiable et satisfait la condition de frontière. Cette méthode étudie les comportements des courbes tendant vers l'infini et telles que leurs images tendent vers les points de  $S_F$  comme suit : ces suites seront labellisées sous la forme de “façons (étoile)” (Définition 2.13 de [NT1]) telles que chaque façon “étoile” différente définit des courbes correspondantes parallèles

localement, qui, en fait, définissent un feuilletage complexe de dimension 1 (Proposition 2.18 de [NT1]) dans l'espace source  $\mathbb{C}^n$ . Les images des feuilletages correspondant aux différentes façons d'approcher la partie singulière de  $S_F$ , ce qui nous permet de décomposer celle-ci en strates. Nous obtenons une stratification différentiable de l'ensemble asymptotique  $S_F$ , qui satisfait aussi la condition de frontière (Théorème 4.1 de [NT1]).

Nous montrons dans cet article que la stratification définie par les *façons* dans [NT1] est une stratification de Thom-Mather. Pour montrer cela, nous utilisons l'autre caractérisation de l'ensemble asymptotique, comme limite des images de courbes, lesquelles tendent vers l'infini. Lorsque ces courbes sont parallèles (définissent un feuilletage), la limite des images est une strate, lisse, obtenue comme limite des images du feuilletage transverse. Nous montrons que les images de telles courbes constituent les rayons des voisinages tubulaires "à la Thom-Mather" ce qui démontre notre Théorème 3.10.

Une autre motivation de cette étude réside dans le fait que connaître une stratification d'une variété singulière permet de calculer son homologie d'intersection: Dans [V-V], les auteurs ont contruit des variétés singulières  $V_F$  associées à une application polynomial  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  telle que l'homologie d'intersection des ces variétés  $V_F$  caractérise la propriété de  $F$  dans le cas le jacobian de  $F$  est partout non nul (Théorème 3.2 de [V-V] et Théorème 4.5 de [NT-V-V]). De plus, une stratification de l'ensemble asymptotique  $S_F$  permet de fournir une stratification de la variété  $V_F$ . Notons que pour une application fixée  $F$ , nous avons beaucoup de variétés associées  $V_F$ , mais les résultats de l'homologie d'intersections des variétés  $V_F$  dans [V-V] et dans [NT-V-V] ne changent pas. Nous savons aussi qu'en general, l'homologie d'intersection d'une variété singulière dépend de sa stratification. Cependant, l'homologie d'intersection d'une variété singulière est invariant avec une stratification de Thom-Mather. Alors, une stratification de Thom-Mather de l'ensemble asymptotique  $S_F$  est nécessaire pour calculer l'homologie d'intersection des variétés  $V_F$ . Nous précisons donc les résultats obtenus dans [V-V] et dans [NT-V-V].

## NOTATION

Nous considérons dans cet article des applications polynomiales  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Nous écrivons souvent  $F : \mathbb{C}_{(x)}^n \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha)}^n$  pour distinguer entre la source et le but.

## 0. PRÉLIMINAIRES

### 0.1. Stratifications.

**Définition 0.1.** Soit  $V$  une variété (différentiable ou algébrique, ou analytique) de dimension  $m$ . Une *stratification* ( $\mathcal{S}$ ) de  $V$  est la donnée d'une filtration

$$V = V_m \supseteq V_{m-1} \supseteq V_{m-2} \supseteq \cdots \supseteq V_1 \supseteq V_0 \supseteq V_{-1} = \emptyset$$

de  $V$  telle que toutes les différences  $X_i = V_i \setminus V_{i-1}$  sont ou bien vides ou bien unions localement finies de sous-variétés lisses connexes et localement fermées de dimension  $i$ , appelées strates.

Soit  $S_i$  une strate de  $V$  et  $\overline{S_i}$  est son adhérence dans  $V$ . Si  $\overline{S_i} \setminus S_i$  est l'union de strates de  $V$ , pour toute strate  $S_i$  de  $V$ , alors nous disons que la stratification de  $V$  satisfait la propriété de frontière.

**Définition 0.2** (voir [T], [M1]). Soit  $V$  une sous-variété d'une variété lisse  $M$ . Nous disons qu'une stratification de  $V$  est une *stratification de Thom-Mather* si chaque strate  $S_i$  est une variété différentiable de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et si pour chaque strate  $S_i$  nous avons

- a) un voisinage ouvert (voisinage tubulaire)  $T_i$  de  $S_i$  dans  $M$ ,
- b) une rétraction continue  $\pi_i$  de  $T_i$  sur  $S_i$ ,
- c) une fonction continue (tubulaire)  $\rho_i : T_i \rightarrow [0, +\infty)$  qui est  $\mathcal{C}^\infty$  sur la partie régulière de  $V \cap T_i$ ,

tels que  $S_i = \{x \in T_i : \rho(x) = 0\}$  et si  $S_i \subset \overline{S_j}$ , alors

- i) l'application restriction  $(\pi_i, \rho_i) : T_i \cap S_j \rightarrow S_i \times [0, +\infty)$  est une immersion lisse,
- ii) pour  $x \in T_i \cap T_j$  tel que  $\pi_j(x) \in T_i$ , nous avons les relations de commutation :
  - 1)  $\pi_i \circ \pi_j(x) = \pi_i(x)$ ,
  - 2)  $\rho_i \circ \pi_j(x) = \rho_i(x)$ ,

lorsque les deux membres de ces formules sont définis.

**Remarque 0.3.** Les conditions de Whitney impliquent des conditions de Thom-Mather.

**0.2. L'ensemble asymptotique.** Soit  $F : \mathbb{C}_{(x)}^n \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha)}^n$  une application polynomiale. Notons  $S_F$  l'ensemble des points du but pour lesquels l'application  $F$  n'est pas propre, *i.e.*,

$$S_F = \{a \in \mathbb{C}_{(\alpha)}^n \text{ tel que } \exists \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_{(x)}^n, |\xi_k| \text{ tend vers l'infini et } F(\xi_k) \text{ tend vers } a\},$$

où  $|\xi_k|$  est la norme euclidienne de  $\xi_k$  dans  $\mathbb{C}^n$ . L'ensemble  $S_F$  est appelé l'ensemble asymptotique de  $F$ .

**Lemme 0.4.** Le point  $a$  appartient à  $S_F$  si et seulement s'il existe une courbe différentiable  $\gamma(u) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x)}^n$  tendant vers l'infini et telle que  $F \circ \gamma(u)$  tend vers  $a$  lorsque  $u$  tend vers l'infini.

Rappelons qu'il suffit, pour définir  $S_F$  de considérer des courbes  $\gamma(u) = (\gamma_1(u), \dots, \gamma_n(u))$  tendant vers l'infini, au sens suivant : chaque coordonnée  $\gamma_1(u), \dots, \gamma_n(u)$  de cette courbe ou bien tend vers l'infini ou bien converge. C'est ce que nous ferons dans cet article.

**Définition 0.5.** Une application polynomiale  $F : \mathbb{C}_{(x)}^n \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha)}^n$  est dite *dominante* si l'adhérence de  $F(\mathbb{C}_{(x)}^n)$  est dense dans  $\mathbb{C}_{(\alpha)}^n$ , c'est-à-dire  $\overline{F(\mathbb{C}_{(x)}^n)} = \mathbb{C}_{(\alpha)}^n$ .

**Théorème 0.6.** [J1] Soit  $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  une application polynomiale dominante. Pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , considérons une équation irréductible de  $x_i$  sur  $\mathbb{C}[F_1, \dots, F_n]$  :

$$\sum_{k=0}^{n_i} \phi_k^i(F) x_i^{n_i-k} = 0,$$

où les  $\phi_k^i$  sont des polynômes et les  $n_i$  sont des entiers positifs. Alors nous avons

$$S_F = \bigcup_{i=1}^n \{a \in \mathbb{C}^n : \phi_0^i(a) = 0\}.$$

## 1. LA MÉTHODE DES FAÇONS

Dans [NT1], nous fournissons la *méthode des façons* pour stratifier la variété asymptotique d'une application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . La détermination des strates de la stratification de l'ensemble asymptotique nécessite deux étapes. La première étape, qui, bien que est très significative pour la construction de la méthode, fournit une partition dont les éléments peuvent être des variétés singulières. Un raffinement de cette partition est nécessaire, en utilisant une version plus fine: les façons "étoile". De manière plus précise, les courbes  $\gamma$  tendant vers l'infini et telles que leurs images  $F \circ \gamma$  tendent vers les points de  $S_F$  seront labellisées sous la forme de "*façons*" et "*façons étoile*", respectivement.

**1.1. Façons.** Dans la première étape, nous définissons "*une façon du point  $a \in S_F$* ". Un point  $a$  de  $S_F$  est la limite de  $F \circ \gamma(u)$ , où  $\gamma(u) = (\gamma_1(u), \dots, \gamma_n(u)) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x)}^n$  est une courbe tendant vers l'infini. Nous classons les coordonnées  $\gamma_1(u), \dots, \gamma_n(u)$  de la courbe  $\gamma(u)$  en trois catégories : i) les coordonnées  $\gamma_{i_r}(u)$  tendant vers l'infini (cette catégorie n'est pas vide); ii) les coordonnées  $\gamma_{j_s}(u)$  telles que  $\lim_{u \rightarrow \infty} \gamma_{j_s}(u)$  est un nombre complexe "indépendant du point  $a$  dans un voisinage de  $a$  dans  $S_F$ ". Cela signifie qu'il existe des points  $a'$  voisins de  $a$  dans  $S_F$  et des courbes  $\gamma^{a'} = (\gamma_1^{a'}(u), \dots, \gamma_n^{a'}(u)) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x)}^n$  tendant vers l'infini telles que  $\lim_{u \rightarrow \infty} F \circ \gamma^{a'}(u) = a'$  et  $\lim_{u \rightarrow \infty} \gamma_{j_s}^{a'}(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \gamma_{j_s}(u) = \text{constante}$ ; iii) les coordonnées  $\gamma_{i_l}(u)$  telles que  $\lim_{u \rightarrow \infty} \gamma_{i_l}(u)$  est un nombre complexe "dépendant du point  $a$ " (ce cas est le cas contraire du cas ii)).

Nous définissons “une façon du point  $a \in S_F$ ” comme un  $(p, q)$ -uple  $(i_1, \dots, i_p)[j_1, \dots, j_q]$  d’entiers où les entiers  $i_1, \dots, i_p$  sont les indices des coordonnées de la première catégorie et  $j_1, \dots, j_q$  les indices des coordonnées de la seconde catégorie. Pour comprendre mieux la définition de *façons*, voir la Définition 1.2 et la section 1.2 de [NT1]. Nous donnons ici un exemple pour éclairer cette Définition.

**Exemple 1.1.** Soit l’application  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  définie par

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 x_2 x_3).$$

Alors l’ensemble  $S_F$  est égal à  $(S_F)_1 \cup (S_F)_2 \cup (S_F)_3$ , où  $(S_F)_1 = \{\alpha_2 = 0\}$ ,  $(S_F)_2 = \{\alpha_3 = 0\}$  et  $(S_F)_3 = \{\alpha_1 = 0\}$ . En fait

i) Pour un point  $a = (\alpha_1, 0, \alpha_3) \in (S_F)_1$  tel que  $\alpha_1 \neq 0$  et  $\alpha_3 \neq 0$ , il existe une courbe  $\gamma = \left(\alpha_1 u, \frac{1}{u}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)$  tendant vers l’infini telle que l’image  $F \circ \gamma$  tende vers  $a$ . Nous disons qu’une “façon” du point  $a$  est  $(1)[2]$ , où

- (1) Le symbole “(1)” signifie que la première coordonnée  $\gamma_1(u) = \alpha_1 u$  de la courbe  $\gamma(u)$  tend vers l’infini.
- (2) Le symbole “[2]” signifie que la deuxième coordonnée  $\gamma_2(u) = \frac{1}{u}$  de la courbe  $\gamma(u)$  tend vers zéro, qui est un nombre complexe fixé, lequel ne dépend pas du point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3)$  quand  $a$  décrit  $(S_F)_2 = \{\alpha_3 = 0\}$ .
- (3) La troisième coordonnée  $\gamma_3(u) = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}$  de la courbe  $\gamma(u)$  tend vers un nombre complexe  $\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$  dépendant du point  $a = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$  quand  $a$  varie. Alors, avec notre choix de labeliser les courbes, l’indice “2” n’apparaîtra pas dans la façon  $(1)[2]$

Notons que nous pouvons vérifier facilement que toute courbe  $\hat{\gamma}(u)$  tendant vers l’infini telle que  $F \circ \hat{\gamma}(u)$  tende vers un point de  $(S_F)_1$  admet la même façon  $(1)[2]$ . Nous disons que la façon de  $(S_F)_1$  est  $(1)[2]$ .

De la même manière que dans le cas i), nous avons :

ii) Pour un point  $a = (\alpha_1, \alpha_2, 0) \in (S_F)_2$  tel que  $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ , il existe une courbe  $\gamma = \left(\frac{\alpha_1}{u}, u, \frac{\alpha_2}{u}\right)$  telle que  $\gamma$  tend vers l’infini et telle que  $F \circ \gamma$  tend vers  $a$ . Nous avons la façon de  $(S_F)_2$  est  $(2)[1, 3]$ .

iii) Pour un point  $a = (0, \alpha_2, \alpha_3) \in (S_F)_3$ , tel que  $\alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ , il existe une courbe  $\gamma = \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \frac{\alpha_2}{u}, u\right)$  telle que  $\gamma$  tend vers l’infini et telle que  $F \circ \gamma$  tend vers  $a$ . La façon de  $(S_F)_3$  est donc  $(3)[2]$ .

iv) Pour un point  $a = (\alpha_1, 0, 0) \in (S_F)_1 \cap (S_F)_2$ , où  $\alpha_1 \neq 0$ , il existe deux courbes  $\gamma = \left(\alpha_1 u, \frac{1}{u}, \frac{1}{u}\right)$  et  $\hat{\gamma} = \left(\frac{1}{u}, u\alpha_1, \frac{1}{u^2}\right)$  telles que  $\gamma$  et  $\hat{\gamma}$  tendent vers l’infini et leurs images  $F \circ \gamma$  et  $F \circ \hat{\gamma}$  tendent vers  $a$ . L’ensemble  $0\alpha_1 \setminus \{0\}$  a donc deux façons  $(1)[2, 3]$  et  $(2)[1, 3]$ .

v) Pour un point  $a = (0, \alpha_2, 0) \in S_{F_2} \cap S_{F_3}$ , où  $\alpha_2 \neq 0$ , il existe deux courbes  $\gamma = (0, u, \frac{\alpha_2}{u})$  et  $\hat{\gamma} = (0, \frac{\alpha_2}{u}, u)$  telles que  $\gamma$  et  $\hat{\gamma}$  tendent vers l'infini et leurs images  $F \circ \gamma$  et  $F \circ \hat{\gamma}$  tendent vers  $a$ . L'ensemble  $0\alpha_2 \setminus \{0\}$  a donc deux façons (2)[1,3] et (3)[1,2].

vi) Pour un point  $a = (0, 0, \alpha_3) \in (S_F)_3 \cap (S_F)_1$ , où  $\alpha_3 \neq 0$ , il existe une courbe  $\gamma = (u, \frac{1}{u^2}, \alpha_3 u)$  telle que  $\gamma$  tend vers l'infini et telle que  $F \circ \gamma$  tend vers  $a$ . La façon de l'ensemble  $0\alpha_3 \setminus \{0\}$  est donc (1,3)[2].

vii) Enfin, considérons l'origine  $0 \in (S_F)_1 \cap (S_F)_2 \cap (S_F)_3$ , il existe quatre courbes  $(\lambda, \frac{1}{u^2}, u)$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $(u, 0, u)$ ,  $(\frac{1}{u^2}, u, 0)$  et  $(u, 0, \mu)$  avec  $\mu \in \mathbb{C}$  tendent vers l'infini et leurs images tendent vers  $a$ . L'origine a donc quatre façons (3)[1,2], (1,3)[2], (2)[1,3] et (1)[2,3].

La partition de l'ensemble  $S_F$ , définie par des façons, est donnée par la filtration :

$$S_F \supset 0\alpha_1 \cup 0\alpha_2 \cup 0\alpha_3 \supset \{0\} \supset \emptyset.$$

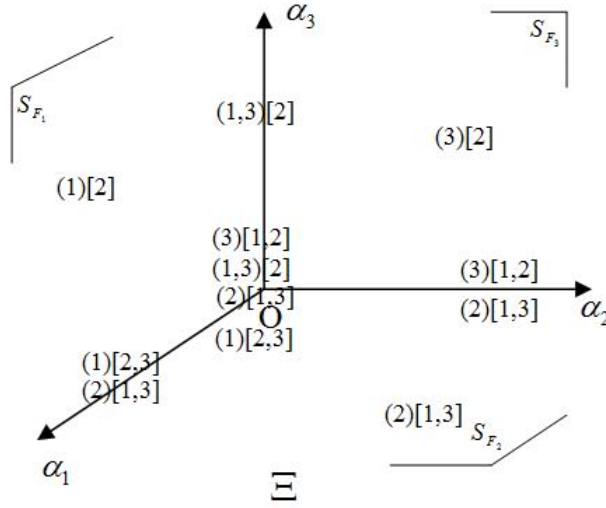


FIGURE 1. La partition de  $S_F$  définie par  $\Xi$ , pour l'application polynomiale dominante  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_2x_3, x_1x_2x_3)$

1

Notons  $\Xi(a)$  l'ensemble de toutes les façons du point  $a$ . La partition de  $S_F$  définie par la relation

$$(1.2) \quad a_1 \sim a_2 \text{ si et seulement si } \Xi(a_1) = \Xi(a_2)$$

<sup>1</sup>Revoir l'exemple, s'il est trop compliqué? On a vraiment besoin un exemple comme ça pour éclairer l'article (oui)? Si oui, refaire le dessin.

est une partition finie de  $S_F$  (Proposition 1.6 de [NT1]).

Les sous-variétés de la partition de l'ensemble asymptotique  $S_F$  définie par la relation 1.2, bien que très significatives pour la construction de *la méthode des façons*, se révèlent malheureusement pouvoir être singulières, comme le montre de l'exemple suivant (Proposition 1.11 de [NT1]).

**Exemple 1.3.** Soit  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  l'application polynomiale dominante telle que

$$F(x_1, x_2) = \left( (x_1 x_2)^2, (x_1 x_2)^3 + x_1 \right).$$

Si la courbe  $\gamma(u) = (\gamma_1(u), \gamma_2(u)) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x_1, x_2)}^2$  tend vers l'infini telle que  $F \circ \gamma(u) = \left( (\gamma_1(u)\gamma_2(u))^2, (\gamma_1(u)\gamma_2(u))^3 + \gamma_1(u) \right)$  ne tend pas vers l'infini, alors  $\gamma_1(u)$  ne peut pas tendre vers l'infini. Comme  $\gamma(u)$  tend vers l'infini, alors  $\gamma_2(u)$  doit tendre vers l'infini et donc  $S_F$  n'admet qu'une seule façon  $\kappa = (2)[1]$ . Si nous choisissons les courbes coordonnées  $\gamma_1(u)$  et  $\gamma_2(u)$  tendant vers 0 et l'infini, respectivement, telles que le produit  $\gamma_1(u)\gamma_2(u)$  tend vers un nombre complexe  $\alpha \in \mathbb{C}$ , alors  $F \circ \gamma(u)$  tend vers  $(\alpha^2, \alpha^3)$ . L'ensemble  $S_F$  est donc la courbe  $\alpha_1^3 = \alpha_2^2$  dans  $\mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$  ayant un point singulier à l'origine (voir Figure 2).

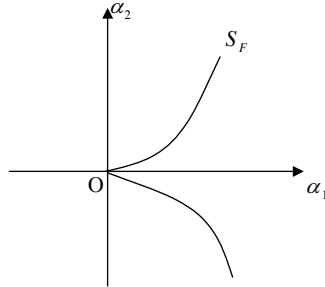


FIGURE 2. L'ensemble asymptotique  $S_F$  de l'application  $F(x_1, x_2) = \left( (x_1 x_2)^2, (x_1 x_2)^3 + x_1 \right)$ .

Donc, un raffinement de la définition des façons est nécessaire afin d'obtenir une stratification en strates lisses. Cela est la deuxième étape de “La méthode des façons”.

## 2. FAÇONS ÉTOILE

La question est donc de savoir pourquoi, dans l'exemple de l'exemple 1.3, la partition de  $S_F$  définie par les façons n'est pas une stratification. Nous devons comprendre la différence entre “la façon [2](1) à l'origine” et “la façon [2](1) au point  $a \in S_F \setminus \{0\}$ ” : Pour un point  $a = (\alpha^2, \alpha^3)$  dans  $S_F \setminus \{0\}$ , nous devons choisir la courbe  $(\frac{1}{u^r}, \alpha u^s)$ , où  $r$  doit être égal à  $s$ . À l'origine 0, nous devons choisir une courbe  $(\frac{1}{u^r}, u^s)$  où  $r > s$ . Nous voyons que

nous devons étudier la vitesse de tendre vers zero et de tendre vers l'infini des courbes coordonnées. Dans l'exemple ci-dessus, si la vitesse de tendre vers zero de la première courbe coordonnée est plus rapide que la vitesse de tendre vers l'infini de la deuxième courbe coordonnée, nous tendons à la partie singulière de  $S_F$ .

Pour formaliser l'idée des *façons étoile*, nous avons donc besoin d'abord de décrire “la vitesse de tendre vers zero et de tendre vers l'infini des courbes coordonnées dans  $\mathbb{C}$ ”.

1) D'abord, nous décrivons “la vitesse de tendre vers zero et de tendre vers l'infini des courbes coordonnées dans  $\mathbb{C}$ ”: Notons que si une courbe  $\rho : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  tend vers un nombre complexe  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ , alors nous pouvons considérer que cette courbe tend vers 0 par changement de variables  $\rho - \lambda$ . Pour cette raison, nous pouvons supposer qu'une courbe  $\rho$  dans  $\mathbb{C}$  ou bien tend vers zero, ou bien tend vers l'infini. Nous disons que

+ la courbe  $\rho$  tend vers 0 avec le degré  $t$  si  $\rho(u) = (\lambda/u)^t + \dots$ , où  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  et les éléments dans “...” sont de la forme  $(\lambda'/u)^r$  avec  $r > t$ .

+ la courbe  $\rho$  tend vers l'infini avec le degré  $t$  si  $\rho(u) = \lambda u^t + \dots$ , où  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  et les éléments dans “...” sont de la forme  $\lambda' k^r$  avec  $r < t$ .

2) Comparer la vitesse de tendre vers zero et de tendre vers l'infini des courbes coordonnées  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de la courbe  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x)}^n$  comme suit : Soit  $\kappa = (i_1, \dots, i_p)[j_1, \dots, j_q]$  une façon de  $S_F$  et soit  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x)}^n$  une courbe tendant vers l'infini avec la façon  $\kappa$ . Supposons que :

$\gamma_{i_r}(u)$  tend vers l'infini avec le degré  $l_{i_r}$ , pour  $r = 1, \dots, p$ ,

$\gamma_{j_s}(u)$  tend vers 0 avec le degré  $l_{j_s}$ , pour  $s = 1, \dots, q$ .

Le  $(p+q)$ -uple  $(l_{i_1}, \dots, l_{i_p}, l_{j_1}, \dots, l_{j_q})$  est appelé  $(p+q)$ -uple associé à la courbe  $\gamma$ .

Notons que, par un changement de paramètre, nous pouvons toujours supposer que les nombres  $l_{i_1}, \dots, l_{i_p}, l_{j_1}, \dots, l_{j_q}$  du  $(p+q)$ -uple d'une courbe  $\gamma$  dans la définition ?? sont des entiers naturels.

+ Définir “deux courbes équivalentes” : Soit  $S_\nu$  une sous-variété de  $S_F$  et  $\kappa = (i_1, \dots, i_p)[j_1, \dots, j_q]$  une façon de  $S_\nu$ . Supposons  $\gamma, \gamma' : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x)}^n$  deux courbes tendant vers l'infini avec la même façon  $\kappa$  telles que  $F \circ \gamma$  et  $F \circ \gamma'$  tendent vers deux points de  $S_\nu$ . Notons  $(l_{i_1}, \dots, l_{i_p}, l_{j_1}, \dots, l_{j_q})$  et  $(l'_{i_1}, \dots, l'_{i_p}, l'_{j_1}, \dots, l'_{j_q})$  leurs deux  $(p+q)$ -uples associés aux courbes  $\gamma$  et  $\gamma'$ , respectivement. Nous disons que les deux courbes  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont *équivalentes* si leur deux  $(p+q)$ -uples associés sont proportionnels, c'est-à-dire

$$(2.1) \quad \gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow (l_{i_1}, \dots, l_{i_p}, l_{j_1}, \dots, l_{j_q}) = \lambda(l'_{i_1}, \dots, l'_{i_p}, l'_{j_1}, \dots, l'_{j_q}), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

(Définition 2.4 de [NT1]).



+ Définir “un point générique d’une sous-variété” de  $S_F$  : Soient  $S_\nu$  une sous-variété de  $S_F$  et  $\kappa$  une façon de  $S_\nu$ . Soit  $a$  un point de  $S_\nu$  et  $\gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x)}^n$  une courbe tendant vers l’infini avec la façon  $\kappa$  telle que  $F \circ \gamma$  tende vers  $a$ . Soit  $\{\hat{\gamma}_i\}$  l’ensemble des courbes équivalentes à  $\gamma$ . Nous disons que le point  $a$  est *un point générique de  $S_\nu$  relativement à la façon  $\kappa$*  s’il admet un voisinage ouvert  $U_a$  de  $a$  dans  $S_\nu$  qui est un ensemble de limites de courbes  $F \circ \hat{\gamma}$ , où  $\hat{\gamma}$  est équivalente à  $\gamma$  (Définition 2.7 de [NT1]).

L’ensemble des points génériques de  $S_\nu$  relativement à une façon  $\kappa$  est dense dans  $S_\nu$ .

+ Formaliser l’idée des “façons étoile”, comme suite: L’idée de la Proposition 2.2 est la suivante : Étant donnée une façon fixée  $\kappa$  d’un élément  $S_\nu$  de la partition de  $S_F$  définie par la relation (1.2), nous subdivisons  $S_\nu$  en utilisant la relation d’équivalence (2) entre les courbes  $\gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x)}^n$  admettant la façon  $\kappa$ . L’image (par l’application  $F$ ) de chaque classe d’équivalence de la relation (2) détermine une sous-variété de  $S_\nu$ , laquelle a une dimension d’autant plus petite que la vitesse de tendre vers zéro des courbes coordonnées est grande. Nous obtenons ainsi une sous-partition de  $S_\nu$ . À partir de ces sous-partitions, nous avons une nouvelle, “bonne” partition de  $S_F$  (Définition 2.6). C’est-à-dire, cette fois, cette partition est une stratification (Théorème 2.7). Le procédé de classer les courbes tendant vers l’infini dans la source, qui sera formalisé sous forme de “façons étoile” (Définition 2.3) est très significatif : chaque classe d’équivalence de la relation (2) contient des courbes parallèles localement, qui autrement dit, définissent un feuilletage de dimension (complexe) 1 dans  $\mathbb{C}_{(x)}^n$  (cf. Exemple ??). Ce fait est la clé de la démonstration du résultat principal de cet article : le Théorème 2.7.

Procédé: Considérons  $S_\nu$  un élément de dimension  $\nu$  de la partition de  $S_F$  définie par la relation (1.2) et considérons une façon  $\kappa$  de  $S_\nu$ . L’ensemble des points génériques de  $S_\nu$  relativement à la façon  $\kappa$  est dense dans  $S_\nu$ . Nous avons

$$\dim S_{\nu_0}^\kappa = \dim S_\nu, \quad \text{et} \quad \overline{S_{\nu_0}^\kappa} = S_\nu.$$

Si  $S_{\nu_0}^\kappa = S_\nu$ , alors la démonstration est finie. Sinon, nous répétons le procédé ci-dessus : Notons  $S_{\nu_1}^\kappa$  l’ensemble des points génériques de  $S_\nu \setminus S_{\nu_0}^\kappa$ . Nous avons

$$\dim S_{\nu_1}^\kappa = \dim(S_\nu \setminus S_{\nu_0}^\kappa), \quad \text{et} \quad \overline{S_{\nu_1}^\kappa} = S_\nu \setminus S_{\nu_0}^\kappa.$$

De plus, nous avons

$$S_{\nu_0}^\kappa \cap S_{\nu_1}^\kappa = \emptyset \quad \text{et} \quad S_{\nu_1}^\kappa \subset \overline{S_{\nu_0}^\kappa}.$$

Puisque  $S_{\nu_0}^\kappa$  est dense dans  $S_\nu$ , il vient  $\dim(S_\nu \setminus S_{\nu_0}^\kappa) < \dim S_{\nu_0}^\kappa$ , nous avons alors

$$\dim S_{\nu_0}^\kappa > \dim S_{\nu_1}^\kappa.$$

Si  $S_{\nu_1}^\kappa = S_{\nu_0}^\kappa$ , la démonstration est finie. Sinon, nous continuons ce procédé. Puisque  $\nu$  est fini, il existe  $t \leq \nu$ ,  $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel que les points génériques de  $S_{\nu_t}^\kappa$  est  $S_{\nu_t}^\kappa$ . Donc  $\{S_{\nu_i}^\kappa\}_{i=0,\dots,t}$  décrit une partition finie de  $S_\nu$ .

Elle nous permettra de définir une sous-partition de la partition de  $S_F$  définie par les façons, laquelle sous-partition se révélera être une “bonne” stratification.

**Proposition 2.2.** [NT1] Soit  $S_\nu$  un élément de dimension  $\nu$  de la partition de  $S_F$  définie par la relation (1.2). Pour chaque façon  $\kappa$  de  $S_\nu$ , la relation d’équivalence (2) nous fournit une partition finie  $\{S_{\nu_i}^\kappa\}_{i=0,\dots,t}$  de  $S_\nu$ , où  $t \leq \nu$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , telle que

- 1)  $\nu = \dim S_{\nu_0}^\kappa > \dim S_{\nu_1}^\kappa > \dim S_{\nu_2}^\kappa > \dots > \dim S_{\nu_t}^\kappa$ ,
- 2)  $S_{\nu_i}^\kappa \cap S_{\nu_j}^\kappa = \emptyset$ , pour  $0 \leq i, j \leq t$  et  $i \neq j$ ,
- 3)  $S_{\nu_i}^\kappa \subset \overline{S_{\nu_j}^\kappa}$  pour  $i > j$  et  $0 \leq i, j \leq t$ .

La partition  $\{S_{\nu_i}^\kappa\}_{i=0,\dots,t}$  est appelée *partition de  $S_\nu$  définie par la façon  $\kappa$* .

**Définition 2.3.** [NT1] Soit  $S_\nu$  un élément de la partition de  $S_F$  définie par la relation (1.2) et soit  $\{S_{\nu_i}^\kappa\}_{i=0,\dots,t}$  la partition de  $S_\nu$  définie par une façon  $\kappa$  de  $S_\nu$  comme dans la Proposition 2.2. Si  $t \geq 1$ , nous définissons les “*façons étoile*” de la façon  $\kappa$ , comme suit :

- la façon  $\kappa$  de  $S_{\nu_1}^\kappa$  appelée la *façon étoile  $\kappa^{1*}$*  de  $S_\nu$ ,
- la façon de  $\kappa$  de  $S_{\nu_2}^\kappa$  appelée la *façon étoile  $\kappa^{2*}$*  de  $S_\nu$ ,
- ...
- la façon  $\kappa$  de  $S_{\nu_t}^\kappa$  appelée la *façon étoile  $\kappa^{t*}$*  de  $S_\nu$ .

Par convention, nous disons que la façon  $\kappa$  est la façons  $\kappa^{0*}$  de  $S_\nu$ .

**Exemple 2.4.** La façon (2)[1] de l’ensemble asymptotique de l’application  $F(x_1, x_2) = ((x_1 x_2)^2, (x_1 x_2)^3 + x_1)$  admet une seule façon étoile (2)[1]<sup>1\*</sup>.

Chaque élément  $S_{\nu_i}^\kappa$  de la partition  $S_{\nu_i}^\kappa_{i=0,\dots,t}$  défini dans la Proposition 2.2 peut être associé à plusieurs classes d’équivalence de courbes, relativement à la relation d’équivalence, mais nous fixons seulement une classe d’équivalence de courbes correspondantes. Avec cette convention, nous avons :

**Proposition 2.5.** [NT1] Fixons une façon étoile  $\kappa^{i*}$  de  $S_F$ . Soit  $U_a$  un voisinage ouvert suffisamment petit d’un point  $a \in S_F$  tel que tout point de  $U_a$  admet la façon étoile  $\kappa^{i*}$ . Alors toutes les courbes correspondantes aux points de  $U_a$  définissent localement un feuilletage de dimension (complexe) 1 de l’espace source  $\mathbb{C}_{(x)}^n$ .

**Définition 2.6.** Considérons  $S_\nu$  un élément de la stratification de  $S_F$  définie par les façons et  $\Xi(S_\nu)$  l’ensemble de toutes les façons de  $S_\nu$ . Nous définissons  $S_{\nu_0}$  comme l’ensemble

des points génériques relativement à au moins une façon de  $S_\nu$ , c'est-à-dire :

$$S_{\nu_0} = \bigcup_{\kappa \in \Xi(S_\nu)} S_{\nu_0}^\kappa,$$

où  $S_{\nu_0}^\kappa$  est défini comme dans la Proposition 2.2.

Notons  $A_{\nu_0} = S_\nu \setminus S_{\nu_0}$ . Nous définissons  $S_{\nu_1}$  comme l'ensemble des points génériques relativement à au moins une façon de  $A_{\nu_0}$  et nous notons  $A_{\nu_1} = A_{\nu_0} \setminus S_{\nu_1}$ . En général, pour  $i \geq 1$ , nous définissons  $S_{\nu_i}$  comme l'ensemble des points génériques relativement à au moins une façon de  $A_{\nu_{i-1}}$  et  $A_{\nu_i} = A_{\nu_{i-1}} \setminus S_{\nu_i}$ . Nous obtenons une sous-partition de  $S_\nu$ . À partir de ces sous-partitions, nous obtenons ainsi une nouvelle partition de  $S_F$ , appelée *la partition de  $S_F$  définie par les façons étoile*.

**Théorème 2.7.** [NT1] *Soit  $F : \mathbb{C}_{(x)}^n \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha)}^n$  une application polynomiale dominante. La partition de l'ensemble asymptotique de  $F$  définie par les façons étoile est une stratification différentiable satisfaisant la propriété de frontière.*

### 3. UNE STRATIFICATION DE THOM-MATHER DE L'ENSEMBLE ASYMPTOTIQUE

Considérons la stratification  $(\mathcal{S})$  de  $S_F$  définie par les façons étoile. Nous allons prouver que la stratification  $(\mathcal{S})$  est une stratification de Thom-Mather. Pour faire cela, nous devons construire des voisinages tubulaires des strates et les fonctions  $\rho$  et  $\pi$  correspondantes (cf. Définition 0.2). En fait, nous allons construire les rayons des voisinages tubulaires et les fonctions “distance”  $\rho$  correspondant aux strates. L'idée est d'utiliser les courbes correspondantes aux façons (Lemme 0.4). Les courbes correspondantes de chaque strate de  $(\mathcal{S})$  forment un feuilletage (Proposition 2.5). L'image de ce feuilletage fournira les rayons des voisinages tubulaires. Les fonctions “distance”  $\rho$  sont définies par récurrence. Les fonction “projection”  $\pi$  sont définies automatiquement le long des rayons des voisinages tubulaires, ou, autrement dit le long des images des courbes correspondantes aux façons. Les voisinages obtenus sont du type des voisinages tubulaires effilés définis par Marie-Hélène Schwartz dans [MHS1, MHS2]. Pour formaliser cette idée, nous avons besoin d'une relation entre des strates adjacentes. Nous définissons une relation d'ordre partielle entre les façons des strates de  $(\mathcal{S})$  dans la partie suivante.

**3.1. La relation entre les façons des strates de la stratification de  $S_F$  définie par les façons.** Notons que dans la suite, quand nous concernons à une façon  $\kappa$ , alors  $\kappa$  peut être une façon étoile, au sens de la Définition 2.3.

**Définition 3.1.** Soient  $\kappa, \kappa'$  deux façons de  $S_F$  telles que  $\kappa = (I_p)[J_q]$ , et  $\kappa' = (I_{p'})[J_{q'}]$ . Définissons la relation d'ordre partielle  $\kappa < \kappa'$  si nous avons l'un des trois cas suivants :

- 1)  $\{I_p\} \supsetneq \{I_{p'}\}$  et  $\{J_q\} \supset \{J_{q'}\}$ .
- 2)  $\{I_p\} = \{I_{p'}\}$  et  $\{J_q\} \supsetneq \{J_{q'}\}$ .
- 3)  $\kappa$  est une façon étoile de  $\kappa'$ .

**Définition 3.2.** Nous disons que  $a < a'$ , où  $a, a' \in S_F$ , si pour tout  $\kappa' \in \Xi^*(a')$ , il existe  $\kappa \in \Xi^*(a)$  tel que  $\kappa = \kappa'$  ou  $\kappa < \kappa'$ .

**Définition 3.3.** Nous définissons l'ordre du point  $a$  de  $S_F$ , notons  $or(a)$ , comme le nombre des façons de  $a$ .

**Remarque 3.4.** D'après la Définition 3.1, alors si  $a < a'$ , nous avons  $or(a) \geq or(a')$ .

**Théorème 3.5.** Soient  $a, a' \in S_F$ . Alors  $a < a'$  si et seulement si  $strate(a) \subset \overline{strate(a')}$ , où  $strate(a)$  et  $strate(a')$  sont des strates de la stratification de  $S_F$  définie par les façons étoile, contiennent  $a$  et  $a'$ , respectivement.

**Preuve.** Soient  $a, a' \in S_F$  tels que  $a < a'$ . Nous avons les deux cas suivants :

1)  $or(a) > or(a')$  : La Proposition ?? dit que chaque façon de  $S_F$  détermine une équation algébrique obtenue à partir de facteurs de l'équation de l'ensemble  $S_F$  dans le Théorème 0.6. Comme  $or(a) > or(a')$ , et par la construction des strates de la stratification de  $S_F$  définie par les façons étoile (Définition 2.6), l'ensemble des équations du système d'équations de  $\overline{strate(a)}$  contient l'ensemble des équations du système des équations de  $\overline{strate(a')}$ . Cela signifie que  $strate(a) \subset \overline{strate(a')}$ .

2)  $or(a) = or(a')$  : il existe une façon  $\kappa = (I_p)(J_q)$  de  $strate(a)$  et une façon  $\kappa' = (I'_p)(J'_q)$  de  $strate(a')$  telles que  $\kappa < \kappa'$ . Dans ce cas-ci, par la Définition 3.1, nous avons deux possibilités :

a) ou bien  $I_p \cup J_q \supsetneq I'_p \cup J'_q$  : la façon  $\kappa'$  n'est pas une façon étoile de  $\kappa$ . Il existe  $a'' \in S_F$  tel qu'une façon  $\kappa'' = (I''_p)[J''_q]$  de  $a''$  satisfait  $I'_p \cup I''_p = I_p$ ,  $J'_q \cup J''_q = J_q$  (unions non nécessairement disjointes). Cela signifie que  $\overline{strate(a)} = \overline{strate(a') \cap strate(a'')}$ . Nous avons donc  $strate(a) \subset \overline{strate(a')}$ .

b) ou bien  $I_p \cup J_q = I'_p \cup J'_q$  : la façon  $\kappa$  est une façon étoile de  $\kappa'$ . Par la Définition 2.3 et la Définition 2.6, la strate  $strate(a)$  est incluse dans  $\overline{strate(a')}$ . ■

Avant d'utiliser la relation entre les façons dans le Théorème 3.5 ci-dessus pour contruire des voisinages tubulaires des strates de la stratification de  $S_F$  définie par les façons étoile, nous avons besoin de deux lemmes suivants.

### 3.2. Lemmes.

**Lemme 3.6.** Soit  $F : \mathbb{C}_{(x)}^n \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha)}^n$  une application polynomiale dominante, alors

$$S_F \cup F(\mathbb{C}_{(x)}^n) = \mathbb{C}_{(\alpha)}^n.$$

**Preuve.** Puisque  $F$  est dominante, nous avons  $\overline{F(\mathbb{C}_{(x)}^n)} = \mathbb{C}_{(\alpha)}^n$  (cf. Définition 0.5). Prenons  $a \in \overline{F(\mathbb{C}_{(x)}^n)} \setminus F(\mathbb{C}_{(x)}^n)$ , alors il existe une suite  $\{\xi_k\} \subset \mathbb{C}_{(x)}^n$  telle que  $F(\xi_k)$  tend vers  $a$ . Si  $\xi_k$  ne tend pas vers l'infini, alors  $\xi_k$  tend vers  $x_0 \in \mathbb{C}_{(x)}^n$  et  $F(\xi_k)$  tend vers  $F(x_0)$ . Nous avons donc  $F(x_0) = a$ , d'où la contradiction avec  $a \notin F(\mathbb{C}_{(x)}^n)$ . Donc  $\xi_k$  tend vers l'infini et  $a \in S_F$ . ■

**Lemme 3.7.** Soit  $a \in \mathbb{C}_{(\alpha)}^n \setminus S_F$ , soit  $\kappa_\nu$  une façon d'une strate  $S_\nu$  de la stratification de  $S_F$  définie par les façons étoile et soit  $a^\nu$  un point de  $S_\nu$ , suffisamment proche de  $a$ . Alors, nous pouvons toujours déterminer une courbe différentiable

$$\gamma^\nu : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x)}^n,$$

telle que, d'une part, lorsque  $u$  tend vers l'infini,  $\gamma^\nu(u)$  tend vers l'infini avec la façon  $\kappa_\nu$  et  $F(\gamma^\nu(u))$  tend vers  $a^\nu$ , et d'autre part,  $F(\gamma^\nu(1)) = a$ .

**Preuve.** D'abord, puisque  $a^\nu \in S_F$ , alors, par le Lemme 0.4, Il existe une courbe différentiable

$$\gamma^\nu : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x)}^n,$$

telle que  $\gamma^\nu(u)$  tend vers l'infini avec la façon  $\kappa_\nu$  et  $F(\gamma^\nu(u))$  tend vers  $a^\nu$  lorsque  $u$  tend vers l'infini. Comme  $a \in \mathbb{C}_{(\alpha)}^n \setminus S_F$ , alors par le Lemme 3.6, nous avons  $a \in F(\mathbb{C}_{(x)}^n)$ . Déterminons maintenant la courbe  $\gamma^\nu$  telle que  $\gamma^\nu(1)$  est contenu dans  $F^{-1}(a)$ , c'est-à-dire,  $F(\gamma^\nu(1)) = a$ . D'après le Théorème 2.7,  $\overline{S_\nu}$  est une variété algébrique. Nous pouvons supposer que l'équation de  $\overline{S_\nu}$  est

$$\phi(\alpha) = 0$$

(notons que, par "l'équation de  $\overline{S_\nu}$ ", nous entendons possiblement un système d'équations). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$\kappa_\nu = (1, \dots, p)[p+1, \dots, p+q],$$

où  $q+p \leq n$ . La courbe  $\gamma^\nu$  peut s'écrire sous la forme :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & (f_{p+1}(a^\nu) + \frac{1}{\lambda_1^\nu u}, \dots, f_{p+q}(a^\nu) + \frac{1}{\lambda_q^\nu u}, \\ & f_1(a^\nu, \lambda_1^\nu, \dots, \lambda_q^\nu, u), \dots, f_p(a^\nu, \lambda_1^\nu, \dots, \lambda_q^\nu, u), f_{p+q+1}, \dots, f_n), \end{aligned}$$

où  $f_l(a^\nu, \lambda_1^\nu, \dots, \lambda_q^\nu, u)$  tend vers l'infini pour  $l = 1, \dots, p$  et  $f_{p+q+1}, \dots, f_n$  tendent vers des nombres complexes fixés lorsque  $u$  tend vers l'infini. Puisque  $F(\gamma^\nu(1)) = a$  et  $a^\nu \in S_\nu$  alors  $(\lambda_1^\nu, \dots, \lambda_q^\nu)$  est la solution du système d'équations

$$\begin{cases} F(\gamma^\nu(1)) = a \\ \phi(a^\nu) = 0 \end{cases},$$

nous pouvons donc toujours déterminer la courbe  $\gamma^\nu$ . ■

L'exemple suivant illustre le Lemme 3.7 ci-dessus.

**Exemple 3.9.** Considérons l'application polynomiale dominante  $F : \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3$  telle que

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - 1, x_2 + 2, (x_1^2 - 1)(x_2 + 2)x_3).$$

L'ensemble asymptotique  $S_F$  de  $F$  est l'union de deux plans  $\{\alpha_1 = 0\}$  et  $\{\alpha_2 = 0\}$ . Prenons le point  $a^1 = (0, 0, 2)$  appartient à une strate de dimension 1 de  $S_F$  et nous voyons que  $a^1 \in \{\alpha_1 = 0\} \cap \{\alpha_2 = 0\}$ . Nous pouvons vérifier facilement qu'une façon de  $a^1$  est  $\kappa = (3)[1, 2]$ . Prenons le point  $a = (3, 1, 3) \in \mathbb{C}_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^3 \setminus S_F$ . D'après le lemme 3.6, le point  $a$  est contenu dans  $F(\mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3)$ . Cherchons maintenant une courbe  $\gamma^1 : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_{(x_1, x_2, x_3)}^3$  telle que, d'une part,  $\gamma^1(u)$  tende vers l'infini avec la façon  $(3)[1, 2]$  et  $F(\gamma^1(u))$  tende vers le point  $a^1$  lorsque  $u$  tend vers l'infini, et que, d'autre part,  $F(\gamma^1(1))$  soit  $a$ . Comme  $\gamma^1(u)$  tende vers l'infini avec la façon  $(3)[1, 2]$  et les deux premières coordonnées de  $F(\gamma^1(u))$  tendent vers 0, donc  $\gamma^1(u)$  peut être écrit sous la forme:

$$\gamma^1(u) = \left( 1 + \frac{1}{\lambda u}, -2 + \frac{1}{\mu u}, x_{3,u} \right), \text{ où } x_{3,u} \rightarrow \infty \text{ et } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Nous avons

$$F(\gamma^1(u)) = \left( \frac{2}{\lambda u} + \frac{1}{\lambda^2 u^2}, \frac{1}{\mu u}, \left( \frac{2}{\lambda u} + \frac{1}{\lambda^2 u^2} \right) \frac{1}{\mu u} x_{3,u} \right).$$

Puisque  $F(\gamma^1(u))$  tend vers  $a^1 = (0, 0, 2)$ , il vient :

$$\begin{aligned} x_{3,u} &= \lambda \mu u^2, \\ F(\gamma^1(u)) &= \left( \frac{2}{\lambda u} + \frac{1}{\lambda^2 u^2}, \frac{1}{\mu u}, 2 + \frac{1}{\lambda u} \right). \end{aligned}$$

Puisque  $F(\gamma^1(1)) = a = (3, 1, 3)$ , nous avons  $\lambda = \mu = 1$ . Nous avons donc

$$\gamma^1(u) = \left( 1 + \frac{1}{u}, -2 + \frac{1}{u}, u^2 \right).$$

### 3.3. Théorème sur une stratification de Thom-Mather de l'ensemble asymptotique.

**Théorème 3.10.** *Soit  $F : \mathbb{C}_{(x)}^n \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha)}^n$  une application polynomiale dominante. La stratification de l'ensemble asymptotique de  $F$  définie par les façons étoile est une stratification de Thom-Mather.*

**Preuve.**

La première étape consiste d'une part à attacher à chaque strate  $S_\nu$  une ou plusieurs façons de  $S_\nu$  de manière à ce que pour chaque séquence de strates incluant  $S_\nu$

$$\emptyset \subset S_0 \subset \overline{S_1} \subset \cdots \subset \overline{S_\nu} \subset \cdots \subset \overline{S_{n-1}}$$

corresponde une suite de façons

$$\kappa_0 < \kappa_1 < \cdots < \kappa_{n-1}.$$

D'autre part, nous considérons des voisinages  $V_\nu$  des strates  $S_\nu$  de  $S_F$ , effilés au sens de M.-H. Schwartz ([MHS2]). Les voisinages tubulaires que nous allons construire en sont des "sous-tubes".

La démonstration est faite par récurrence décroissante, en commençant par la strate de dimension la plus grande :  $S_{n-1}$ , que nous notons  $S_{n_0}$ . A chaque étape, nous définissons le voisinage tubulaire ainsi que les fonctions  $\rho$  et  $\pi$ .

Considérons donc un point  $a$  situé dans  $V_{n_0} \setminus (\bigcup_{\nu < n-1} V_\nu \cup S_F)$ . Nous pouvons choisir un point  $a^{n_0}$  suffisamment proche de  $a$  et, pour toute façon  $\kappa_{n_0}$  de  $S_{n-1} = S_{n_0}$ , le Lemme 3.7 nous fournit le rayon  $F(\gamma^{n_0}(u))$  reliant  $a$  à  $a^{n_0}$ . Le voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_{n_0}$  de  $S_{n_0} \setminus \bigcup_{\nu < n-1} V_\nu$  est constitué de l'ensemble des rayons  $F(\gamma^{n_0}(u))$  aboutissant aux points  $a^{n_0}$  de  $S_{n_0} \setminus \bigcup_{\nu < n-1} V_\nu$ . Pour tout point  $a' = F(\gamma^{n_0}(u))$  situé sur ce rayon, nous définissons

$$(3.11) \quad \pi_{n_0}(a') = a^{n_0} \text{ et } \rho_{n_0}(a') = d_c(a', a^{n_0})$$

où  $d_c(a', a^{n_0})$  est la distance curviligne, de  $a'$  à  $a^{n_0}$ , le long de la courbe  $F(\gamma^{n_0})$ .

Le cas général de la récurrence suit les mêmes techniques que dans le cas de deux strates. Celui-ci est cependant plus simple à expliciter, ce que nous faisons ci-dessous. Nous examinons ensuite le cas général de la récurrence.

Considérons donc maintenant le cas de deux strates, plus précisément, la strate  $S_{n_0}$  et une strate  $S_{n_1}$  de dimension immédiatement inférieure à celle de  $S_{n_0}$ . Nous allons construire le voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_{n_1}$  de  $S_{n_1}$  en trois parties, la première étant la plus délicate.

1) Nous notons  $\kappa_{n_0}$  et  $\kappa_{n_1}$  deux façons de  $S_{n_0}$  et  $S_{n_1}$  respectivement, telles que  $\kappa_{n_1} < \kappa_{n_0}$ . Considérons un point  $a$  situé dans  $(V_{n_0} \cap V_{n_1}) \setminus S_F$ . Nous pouvons, comme précédemment, choisir un point  $a^{n_0}$  suffisamment proche de  $a$ , et utiliser le Lemme 3.7. Nous pouvons supposer que

$$\kappa_{n_0} = (1, \dots, p)[p+1, \dots, p+q],$$

où  $q+p \leq n$ . La courbe  $\gamma^0$  est construite comme dans la preuve du Lemme 3.7 et peut s'écrire sous la forme :

$$(3.12) \quad \left( f_{p+1}(a^{n_0}) + \frac{1}{(\lambda_1^{n_0})u}, \dots, f_{p+q}(a^{n_0}) + \frac{1}{(\lambda_q^{n_0})u}, \right. \\ \left. f_1(a^{n_0}, \lambda_1^{n_0}, \dots, \lambda_q^{n_0}, u), \dots, f_p(a^{n_0}, \lambda_1^{n_0}, \dots, \lambda_q^{n_0}, u), f_{p+q+1}, \dots, f_n \right),$$

où  $f_l(a^{n_0}, \lambda_1^{n_0}, \dots, \lambda_q^{n_0}, u)$  tend vers l'infini pour  $l = 1, \dots, p$  et  $f_{p+q+1}, \dots, f_n$  tendent vers des nombres complexes fixés lorsque  $u$  tend vers l'infini. Nous obtenons ainsi le rayon  $(a, a^{n_0})$  du voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_{n_0}$ .

Le voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_{n_0}$  de  $S_{n_0}$  dans  $V_{n_0} \cap V_{n_1}$  est construit de façon à ce que la longueur  $\varepsilon(a^{n_0})$  des rayons de  $\mathcal{T}_{n_0}$  tende vers 0 lorsque la distance du point  $a^{n_0}$  à la strate  $S_{n_1}$  tend vers 0. Cette construction correspond à celle des voisinages tubulaires effilés de M.-H. Schwartz ([MHS2]).

Appelons  $\mathcal{T}_{n_0}^\varepsilon$  le voisinage tubulaire ainsi obtenu. Pour tout  $a^{n_0}$ , notons  $\varepsilon'(a^{n_0}) = \varepsilon(a^{n_0})/2$ . Nous obtenons ainsi un voisinage  $\mathcal{T}_{n_0}^{\varepsilon'}$  construit par homothétie de rapport 1/2 (voir figure 4).

Nous construisons maintenant  $\mathcal{T}_{n_1}$  et définissons les fonctions  $\pi_{n_0}, \rho_{n_0}$  et  $\pi_{n_1}, \rho_{n_1}$  dans  $\mathcal{T}_{n_0}^{\varepsilon'} \cap V_{n_1}$ . Pour cela, considérons un point  $a$  de  $\mathcal{T}_{n_0}^{\varepsilon'} \cap V_{n_1}$ . Nous pouvons choisir un point  $a^{n_1}$  situé sur la strate  $S_{n_1}$ , suffisamment proche de  $a$ , et utiliser le Lemme 3.7. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$\kappa_{n_1} = (1, \dots, p)[p+1, \dots, p+q+1].$$

Nous obtenons une courbe  $\gamma^{n_1}(t)$ , laquelle peut s'écrire sous la forme :

$$(3.13) \quad \left( g_{p+1}(a^{n_1}) + \frac{1}{(\lambda_1^{n_1})t}, \dots, g_{p+q+1}(a^{n_1}) + \frac{1}{(\lambda_{q+1}^{n_1})t}, \right. \\ \left. g_1(a^{n_1}, \lambda_1^{n_1}, \dots, \lambda_{q+1}^{n_1}, t), \dots, g_p(a^{n_1}, \lambda_1^{n_1}, \dots, \lambda_{q+1}^{n_1}, t), g_{p+q+2}, \dots, g_n \right),$$

où  $g_l(a^{n_1}, \lambda_1^{n_1}, \dots, \lambda_{q+1}^{n_1}, t)$  tend vers l'infini pour  $l = 1, \dots, p$  et  $g_{p+q+2}, \dots, g_n$  tendent vers des nombres complexes fixés lorsque  $t$  tend vers l'infini. Puisque  $F(\gamma^{n_1}(1)) = a$  et



$a^{n_1} \in S_{n_1}$  alors  $(\lambda_1^{n_1}, \dots, \lambda_{q+1}^{n_1})$  est une solution du système d'équations

$$\begin{cases} F(\gamma^{n_1}(1)) = a \\ \phi_1(a^{n_1}) = 0 \end{cases},$$

où  $\phi_1$  est l'équation de la variété algébrique  $S_{n_1}$ . La courbe  $F(\gamma^{n_1}(t))$ , allant de  $a$  à  $a^{n_1}$  est un rayon du voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_{n_1}$  de  $S_{n_1}$  (voir figure 3).

Soit  $u_j \in (1, +\infty)$  une valeur fixée du paramètre  $u$  de la courbe  $\gamma^{n_0}(u)$ , notons  $a_j$  le point  $F(\gamma^{n_0}(u_j))$  situé sur la courbe  $(a, a^{n_0})$ . De la même manière que la courbe  $\gamma^{n_1}$  (formule (3.13)) nous pouvons construire des courbes  $F(\gamma_j^{n_1}(t))$  reliant  $a_j$  à  $a^{n_1}$  et avec le même paramètre  $t$  (voir figure 3).

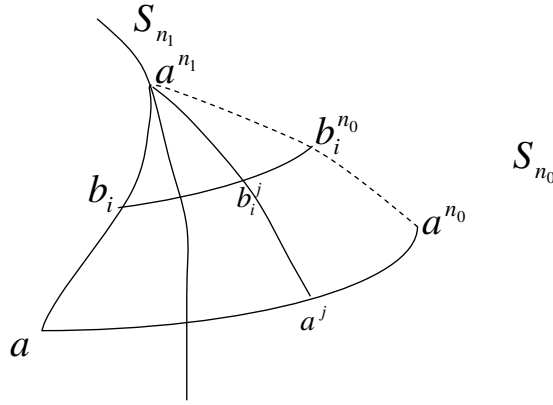


FIGURE 3. Construction de  $\mathcal{T}_{n_1} \cap \mathcal{T}_{n_0}^{\epsilon'}$ .

D'une part, lorsque  $u_j$  tend vers l'infini, la courbe  $(a_j, a^{n_1})$  tend vers une courbe  $(a^{n_0}, a^{n_1})$  située dans la strate  $S_{n_0}$ . Les courbes  $(a_j, a^{n_1})$  et leur limite  $(a^{n_0}, a^{n_1})$  sont des rayons du voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_{n_1}$  de la strate  $S_{n_1}$ , que nous construisons. Par définition, pour tout point  $a'$  situé sur une courbe  $(a_j, a^{n_1})$  (ou sur la limite  $(a^{n_0}, a^{n_1})$ ), nous posons  $\pi_{n_1}(a') = a^{n_1}$ .

D'autre part, tout point  $b_i$  situé sur la courbe  $(a, a^{n_1})$  s'écrit  $b_i = F(\gamma^{n_1}(t_i))$  pour une valeur  $t_i$ . Fixons cette valeur  $t_i$  du paramètre  $t$ . Pour  $u_j$  allant de 1 à  $+\infty$ , l'ensemble des points  $b_i^j = F(\gamma_j^{n_1}(t_i))$  décrit une courbe reliant le point  $b_i$  à un point  $b_i^{n_0}$  de  $S_{n_0}$ . Le choix des courbes  $\gamma^{n_0}$  et  $\gamma^{n_1}$  ((3.12) et (3.13)) nous permet d'affirmer que le point  $b_i^{n_0} = \lim_{u_j \rightarrow \infty} (F(\gamma_j^{n_1}(t_i)))$  est situé sur la courbe  $(a^{n_0}, a^{n_1})$ . Par définition, nous disons que les points de la courbe  $(b_i, b_i^{n_0})$  sont situés à "même distance" du point  $a^{n_1}$ , relativement

à la fonction  $\rho_{n_1}$ , plus précisément nous posons :

$$\rho_{n_1}(b_i) = \rho_{n_1}(b_i^j) = \rho_{n_1}(b_i^{n_0}) = \widehat{b_i^{n_0} a^{n_1}} \quad \text{pour tout } t_i,$$

où  $\widehat{b_i^{n_0} a^{n_1}}$  est le longueur de la courbe reliant deux points  $b_i^{n_0}$  et  $a^{n_1}$ , défini comme le longueur de deux points dans l'espace  $\mathbb{C}^n$ , avec le sens classique. En particulier,

$$\rho_{n_1}(a) = \rho_{n_1}(a_j) = \rho_{n_1}(a^{n_0}) = \widehat{a^{n_0} a^{n_1}}.$$

## 2) Construction de $\mathcal{T}_{n_1} \setminus \mathcal{T}_{n_0}^\epsilon$ .

Dans  $V_{n_1} \setminus (\mathcal{T}_{n_0}^\epsilon \cap V_{n_1})$ , c'est-à-dire dans la partie qui ne rencontre pas les voisinages tubulaires des strates dont  $S_{n_1}$  est adjacente, la situation est celle du Lemme 3.7, relativement à la façon  $\kappa_{n_1}$ . Nous obtenons des courbes  $\gamma^{n_1}$  dont les images par  $F$  sont des rayons de  $\mathcal{T}_{n_1}$ , ce qui définit la fonction  $\pi_{n_1}$ . La fonction  $\rho_{n_1}$  est définie comme en (3.11).

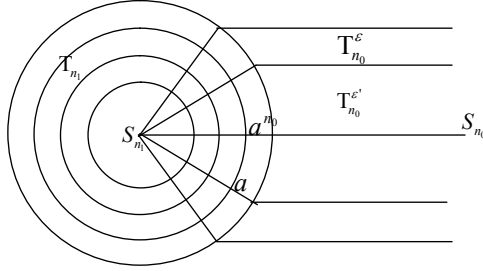


FIGURE 4. Le voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_{n_1}$  en trois parties.

## 3) Construction de $\mathcal{T}_{n_1} \cap (\mathcal{T}_{n_0}^\epsilon \setminus \mathcal{T}_{n_0}^{\epsilon'})$ .

De même que dans le cas précédent, le Lemme 3.7 fournit des courbes  $\gamma^{n_1}$  rayons de  $\mathcal{T}_{n_1}$ , ce qui définit la fonction  $\pi_{n_1}$ . Dans  $V_{n_1} \cap (\mathcal{T}_{n_0}^\epsilon \setminus \mathcal{T}_{n_0}^{\epsilon'})$ , la fonction  $\rho_{n_1}$  est déjà définie sur  $V_{n_1} \cap \partial(\mathcal{T}_{n_0}^\epsilon)$  et sur  $V_{n_1} \cap \partial(\mathcal{T}_{n_0}^{\epsilon'})$ . Nous la prolongeons de façon différentiable, le long des courbes  $F(\gamma^{n_0})$  en utilisant les fonctions de prolongement de Whitney ([Wh] IV, §27) (voir figure 4).

Remarquons que si l'on a deux strates (ou plus)  $S_{n_0}$  et  $S'_{n_0}$  telles que  $S_{n_1} \subset \overline{S_{n_0}}$  et  $S_{n_1} \subset \overline{S'_{n_0}}$ , alors, comme les voisinages  $V_{n_0}$  et  $V'_{n_0}$  pris au début de la construction ne se rencontrent pas, la construction précédente peut être effectuée séparément relativement aux deux strates (voir figure 5). Cette construction est similaire à celle de M.-H. Schwartz [MHS2]. Ceci termine le cas de deux strates.

Montrons maintenant que si la construction est faite pour une suite de strates

$$S_{n_{k-1}}, \dots, S_{n_1}, S_{n_0}$$

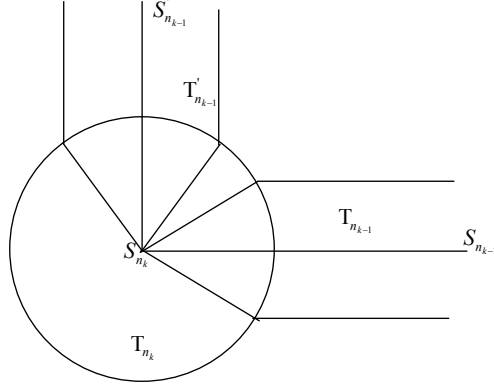


FIGURE 5. Cas d'une strate dans le bord de deux strates.

telles que

$$S_{n_{k-1}} \subset \cdots \subset \overline{S_{n_1}} \subset \overline{S_{n_0}},$$

alors, si  $S_{n_k}$  est une strate telle que  $S_{n_k} \subset \overline{S_{n_{k-1}}}$ , la construction peut être faite pour la suite de strates

$$S_{n_k}, S_{n_{k-1}}, \dots, S_{n_1}, S_{n_0}.$$

Considérons une suite de façons

$$\kappa_{n_k} < \kappa_{n_{k-1}} < \cdots < \kappa_{n_1} < \kappa_{n_0}$$

des strates correspondantes. Par hypothèse de récurrence, il existe des tubes  $\mathcal{T}_{n_i}$  autour des strates  $S_{n_i}$ , ceci pour  $i = 0, \dots, k-1$  ainsi que des fonctions  $\pi_{n_i}$  et  $\rho_{n_i}$  satisfaisant les conditions de Thom-Mather.

Comme précédemment (cf 1) du cas de deux strates), nous construisons d'abord le voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_{n_k}$  dans  $V_{n_k} \cap \bigcap_{i=k-1}^0 \mathcal{T}_{n_i}$ . Pour un point  $a \in \bigcap_{i=k-1}^0 \mathcal{T}_{n_i}$ , nous supposons donc construit un "polyèdre curviligne"  $P_{k-1}$  de sommets le point  $a$  et des points  $a^{n_i}$  tels que  $a^{n_i} \in S_{n_i}$ , pour  $i = k-1, \dots, 0$ . Supposons le point  $a$  suffisamment proche de  $S_{n_k}$  (*i.e.* situé dans le voisinage  $V_{n_k}$ ) et considérons un point  $a^{n_k} \in S_{n_k}$  proche de  $a$ .

D'après le Lemme 3.7, appliqué à  $a$  et  $a^{n_k}$ , il existe une courbe  $\gamma^{n_k}(t_k)$  joignant  $a$  et  $a^{n_k}$ , relativement à la façon  $\kappa_{n_k}$  (voir figure 6). Comme précédemment, chaque point  $b$  d'une arête  $a, a^{n_i}$  du polyèdre curviligne peut être joint au point  $a^{n_k}$  par une courbe du même type, qui est un rayon du voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_{n_k}$  de  $S_{n_k}$  que nous construisons. Lorsque le point  $b$  tend vers  $a^{n_i} \in S_{n_i}$ , nous obtenons une courbe  $(a^{n_i}, a^{n_k})$  située dans la strate  $S_{n_i}$  et qui est également un rayon du voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_{n_k}$  de  $S_{n_k}$ . Les courbes

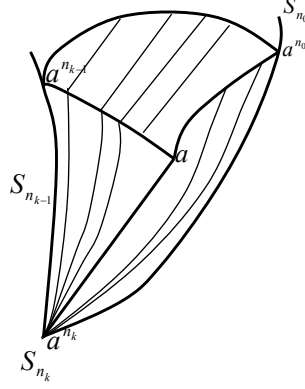


FIGURE 6. La récurrence

obtenues dépendent toutes du même paramètre  $t_k$ . Nous obtenons ainsi un nouveau polyèdre curviligne dont les sommets sont le point  $a$  et les points  $a^{n_i}$  tels que  $a^{n_i} \in S_{n_i}$ , pour  $i = k, \dots, 0$ . Comme précédemment, chaque point  $a'$  de la courbe  $(a, a^{n_k})$  correspond à une valeur  $t_k \in [1, +\infty)$  du paramètre. En particulier, les points du polyèdre  $P_{k-1}$  correspondent à la valeur  $t_k = 0$ . Par définition, nous posons

$$\rho_{n_k}(a) = \rho_{n_k}(a^{n_i}) \text{ pour } i = k-1, \dots, 0$$

et tous les points du polyèdre obtenu à partir des points de  $P_{k-1}$  et correspondant à la même valeur  $t_k$  du paramètre, ont même valeur de  $\rho_{n_k}$ .

La construction de  $\mathcal{T}_{n_k}$  dans  $V_{n_k} \setminus \bigcap_{i=k-1}^0 \mathcal{T}_{n_i}$  ainsi que la définition des fonctions  $\pi_{n_k}$  et  $\rho_{n_k}$  est alors similaire au cas de deux strates effectué ci-dessus.

Il nous reste à préciser la construction des voisinages tubulaires dans les deux cas suivants :

- 1) cas où il n'existe pas de relation entre les façons d'une strate et de la strate située dans son bord.
- 2) cas où l'on a plusieurs façons pour une même strate.

Dans le premier cas, puisque la stratification de  $S_F$  définie par les façons étoile est une stratification algébrique, alors il y a une relation entre des équations des strates adjacentes. En utilisant cette relation, la preuve est procédée avec le même chemin.

Dans le second cas, supposons qu'il existe  $r$  façons pour une même strate  $S_\nu$ . Supposons qu'il existe deux suites de strates incluant  $S_\nu$  pour lesquelles les façons  $\kappa_\nu$  et  $\kappa'_\nu$  sont différentes. Cela implique qu'il existe deux strates  $S_{n_i}$  et  $S'_{n_i}$  dans le bord de  $S_\nu$  avec

différentes façons. Les rayons de la partie du voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_\nu$  située dans  $\mathcal{T}_{n_i}$  sont construits avec des courbes  $\gamma^{n_i}(u)$  tandis que les rayons de la partie du voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_\nu$  située dans  $\mathcal{T}'_{n_i}$  sont construits avec des courbes  $\gamma'^{n_i}(u)$ . Nous obtenons donc des systèmes de courbes différents pour chaque partie du voisinage tubulaire  $\mathcal{T}_\nu$  de  $S_\nu$ . Nous pouvons donc conclure comme dans le premier cas. En fait les courbes obtenues dans ce cas sont de la forme suivante :

$$\Phi(u, s) := s_1 F(\gamma_1^\nu(u)) + \cdots + s_r F(\gamma_r^\nu(u)),$$

où d'une part, les  $r$  courbes  $\gamma_1^\nu(u), \dots, \gamma_r^\nu(u)$  tendant vers l'infini et telles que leurs images tendent vers  $a^\nu$  correspondent aux  $r$  façons de  $S_\nu$ , et où d'autre part,  $s_1 + \cdots + s_r = 1$  et  $0 \leq s_i \leq 1$ , pour  $i = 1, \dots, r$ , seule l'une des valeurs  $s_i$  valant 1 dans chaque  $\mathcal{T}_\nu \cap \mathcal{T}_{n_i}$ . ■

## REFERENCES

- [Es] A.R.P van den Essen, *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Séminaires et Congrès 2(1997), n° 2, pp 55-81, Société Mathématique de France.
- [J1] Z. Jelonek, *The set of points at which polynomial map is not proper*, Ann. Polon. Math. 58 (1993), no. 3, 259-266.
- [M1] J. Mather, Notes on topological stability, 1970, miméographié, Harvard University.
- [NT-V-V] T. B. T. Nguyen, A. Valette and G. Valette, *On a singular variety associated to a polynomial mapping*, Journal of Singularities volume 7 (2013), 190-204.
- [NT1] T. B. T. Nguyen, *La méthode des façons*, ArXiv: 1407.5239.
- [NT2] T. B. T. Nguyen, *Étude de certains ensembles singuliers associés à une application polynomiale*, Thèse, Université d'Aix Marseille, <http://tel.archives-ouvertes.fr/>, ID : tel-00875930.
- [MHS1] M. H. Schwartz, *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe*, CRAS 260 (1965) 3262 - 3264 et 3535 - 3537.
- [MHS2] M. H. Schwartz, *Champs radiaux sur une stratification analytique*, Travaux en cours, Vol. 39, Hermann, Paris, 1991.
- [T] R. Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull. Amer. Math. Soc., 75, 2, 240-284, 1969.
- [V-V] A. Valette and G. Valette, *Geometry of polynomial mappings at infinity via intersection homology*, Ann. I. Fourier vol. 64, fascicule 5 (2014), 2147-2163.
- [Wh] H. Whitney, *Geometric Integration Theory* Princeton Mathematical Series 21, Princeton, NJ and London: Princeton University Press and Oxford University Press, 1957.

(Nguyễn Thị Bích Thủy) UNESP, UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, "JÚLIO DE MESQUITA FILHO", SÃO JOSÉ DO RIO PRETO, BRASIL

*E-mail address:* bichthuy@ibilce.unesp.br